Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение   
высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Институт Информационных технологий, математики и механики

Отчёт по лабораторной работе

**Решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты четвертого порядка**

Выполнил:

  студент гр. 381806-01

Алибеков М.Р.

Проверил:

  Доцент каф. ДУМЧА, ИИТММ

Эгамов А.И.

Нижний Новгород

2021 г.

**Содержание**

[1. Введение 3](#_Toc66709025)

[2. Постановка задачи 4](#_Toc66709026)

[3. Теоретическая основа 5](#_Toc66709027)

[**3.1** **Метод Рунге-Кутты 4-ого порядка** 5](#_Toc66709028)

[**3.2** **Аналитическое решение системы ОДУ и задачи Коши** 7](#_Toc66709029)

[4. Руководство пользователя 8](#_Toc66709030)

[5. Заключение 11](#_Toc66709031)

[6. Литература 12](#_Toc66709032)

1. **Введение**

Лабораторная работа направлена на изучение вопроса нахождения приближенного решения задачи Коши для системы из трёх обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка методом Рунге-Кутты четвёртого порядка и сравнения приближенного решения с точным, полученным аналитическим путём.

Основа большинства физических законов сформулирована в терминах дифференциальных уравнений, а потому они являются одним из важнейших инструментов математического моделирования. Законы Ньютона в механике и уравнения Максвелла в теории электромагнитного поля, законы Кирхгофа в теории электрических цепей и уравнение Шредингера в квантовой механике, а также многие другие дифференциальные уравнения или их системы составляют ядро математического аппарата физических исследований.

Аналитическое решение некоторых наиболее интересных дифференциальных уравнений, как правило, невозможно, и, в связи с этим, приходится прибегать к приближенным вычислениям и, как следствие, возникает задача численного определения интегральных кривых исследуемых уравнений.

В ходе данной лабораторной работы был изучен и применён на практике метод Рунге-Кутты четвёртого порядка. Хотя методы Рунге-Кутты и составляют важный класс численных методов решения ОДУ, он всё же не единственный, и существуют, и широко применяются и другие методы численного решения ДУ, такие как, многошаговые методы (методы Адамса, методы Хэмминга и др.), методы экстраполяции, и т.д.

1. **Постановка задачи**

В рамках лабораторной работы ставится задача реализации программного комплекса с графическим пользовательским интерфейсом (на одном из языков программирования высокого уровня), который позволит находить приближенное решение задачи Коши для системы из трёх обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка методом Рунге-Кутты четвёртого порядка.

В рамках задачи позволено самому выбрать СОДУ (систему обыкновенных дифференциальных уравнений) для исследования. Из явных ограничений можно отметить лишь фиксированное число зависимых переменных (), т.е. в данной задаче: независимая переменная, а переменные, зависящие от .

Программный комплекс должен обладать следующими возможностями:

* При заданной СОДУ возможность задать:
  + начальные условия ().
  + интервал интегрирования ()
  + число шагов интегрирования ()
* Нахождение приближенного решения в узлах с , методом Рунге-Кутты.
* Вычисление аналитического решения задачи Коши СОДУ при заданных начальных условиях.
* Построение фазовых портретов найденных точного и приближенного решений в соответствующих узлах.

*Замечание:* учитывая тот факт, что у нас система с 3-мя переменными, чтобы построить правильный фазовый портрет, потребуется смоделировать 3D-изображение. К сожалению, данная задача выходит за рамки данного курса, в виду того, что реализация данной задачи без использования профессиональных средств разработок и специальных методов программирования слишком трудоёмка. А потому имеет смысл перейти к построению отдельных графиков приближенного и точного решений, т.е. построение графиков и .

Для работы с методом Рунге-Кутты должен быть представлен отдельный класс. Также целесообразно иметь некий общий абстрактный класс для СОДУ, содержащий общие признаки.

Программное решение должно выглядеть приблизительно следующим образом:

1. Модуль MainForm – поддержка GUI (графического пользовательского интерфейса) для работы с программой.
2. Модуль System\_3\_ODE – общий абстрактный класс, предоставляющий возможность работы с СОДУ определённого вида.
3. Модуль RK4Method – комплексное осуществление работы с методом Рунге-Кутты.
4. **Теоретическая основа**

# **Метод Рунге-Кутты 4-ого порядка**

Методы Рунге-Кутты – большой класс численных методов решения задачи Коши для ОДУ и их систем. К данному классу относятся: явный и модифицированный методы Эйлера, представляющие собой методы 1-ого и 2-ого порядка точности соответственно, стандартные явные методы 3-его порядка точности, не получившие широкого распространения, наиболее распространённый и широко используемый *классический* метод Рунге-Кутты, имеющий 4-ый порядок точности и сопряженные большими вычислительными трудностями методы более высокого порядка точности.

Метод Рунге-Кутты 4-ого порядка при вычислениях с постоянным шагом интегрирования столь широко распространён, что его часто называют просто методом Рунге-Кутты. Он в данной лабораторной работе и будет использован.

Системой дифференциальных уравнений называется система вида

где – независимый аргумент, – зависимая функция, , – начальные условия.

Тогда приближенное значение в последующих точках вычисляется по итерационной формуле:

Вычисление нового значения проходит в четыре стадии:

где — величина шага сетки по .

Этот метод имеет четвёртый порядок точности, т.е. ошибка на одном шаге имеет порядок , а суммарная ошибка на конечном интервале интегрирования имеет порядок .

# **Аналитическое решение системы ОДУ и задачи Коши**

В данной задаче позволено выбрать произвольную систему из 3-х ОДУ, а потому была выбрана следующая система:

Шаги поиска решения можно пропустить по той простой причине, что данная система является ничем непримечательной СОДУ, подобные которым были многократно решены в курсе Дифференциальных уравнений. Поэтому сразу запишем ответ, без непосредственных математических выкладок:

Но не стоит забывать, что в нашу задачу также входит аналитическое решение задачи Коши согласно заданным начальным условиям, что эквивалентно поиску значений , как некоторых функций от , т.е. поиску

Путем несложных математических преобразований, можно получить следующие значения для искомых коэффициентов:

Заметим, что зависят исключительно от начальных условий и ни от чего более, а, следовательно, при подстановке соответствующих значений , превратятся в константы, и при их подстановке в решение системы ОДУ, получим точное решение задачи Коши для заданных начальных условий.

1. **Руководство пользователя**

При запуске программы перед пользователем появляется интерфейс управления (см. Рисунок 1):

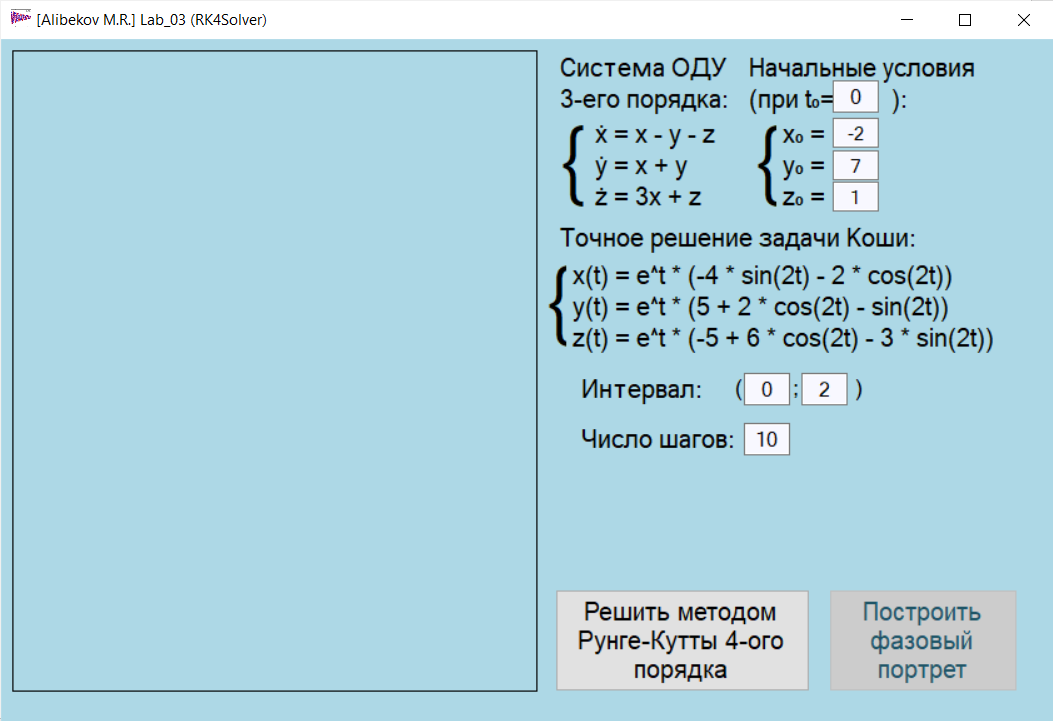


Рисунок 1. Окно приложения

После запуска можно заметить большое пустое поле в левой области приложения. Именно в этой области располагается таблица приближенных значений численного решения и там же будут вырисовываться графики . В правой области располагаются данные о самой системе ОДУ, включающие в себя саму систему, аналитическое решение системы при заданных начальных условиях и форматируемые поля для непосредственного задания параметров (начальных условий, интервала и числа шагов).

При заданных параметрах можно воспользоваться методом Рунге-Кутты, нажав кнопку “Решить методом Рунге-Кутты 4-ого порядка”. В результате появится таблица с соответствующими приближенными значениями. (см. Рисунок 2).

Помимо этого, появляется возможность построить “фазовый портрет” системы (точнее, графики функций ). (см. Рисунок 3)

По умолчанию показывается график , но также, меняя “переключатели” (“График x(t)”, “График y(t)”, “График z(t)”), можно выбрать другие графики. (см. Рисунок 4 и Рисунок 5).

Вообще говоря, каждый раз строятся по 2 графика (приближенное решение (красной линией) и точное решение (зелёной линией)). Но красная линия полностью перекрывается зелёной, потому что приближенное решение в этих точках совпадает с точным решением.

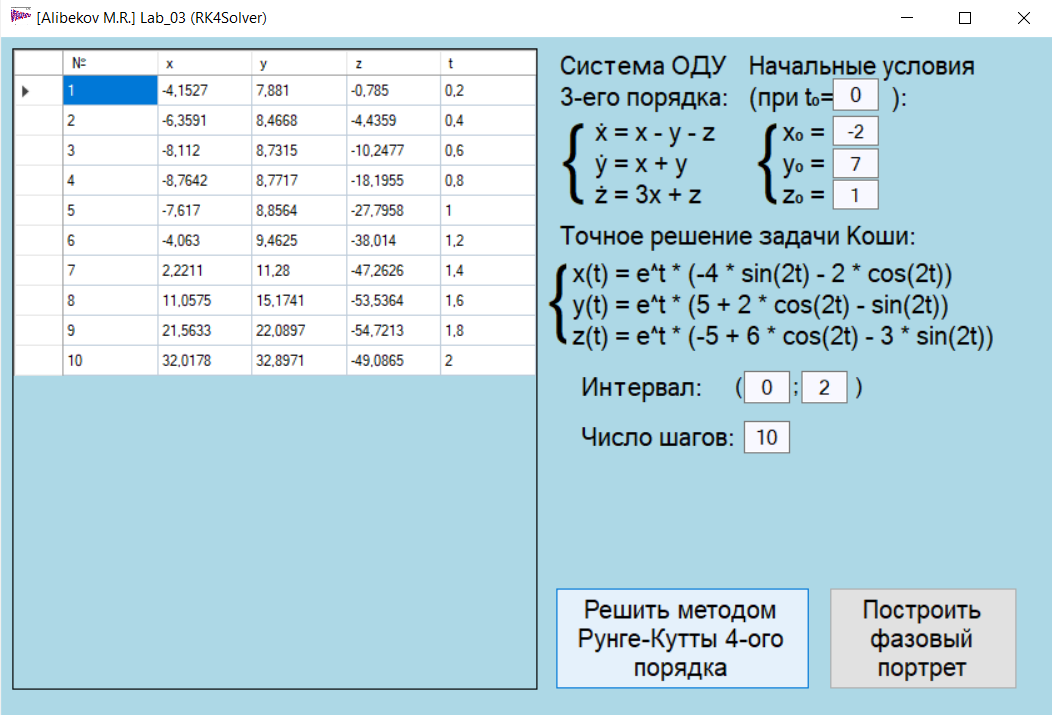


Рисунок 2. Приближенное решение методом Рунге-Кутты



Рисунок 3. Построение графиков функций (график x(t))

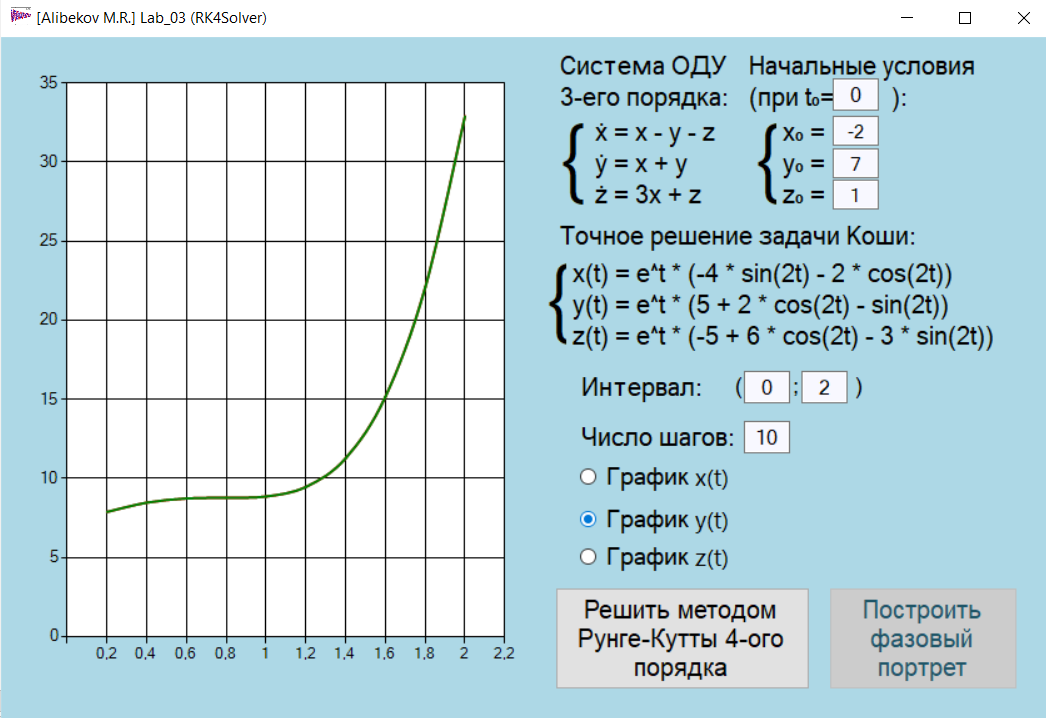


Рисунок 4. Построение графиков функций (график y(t))

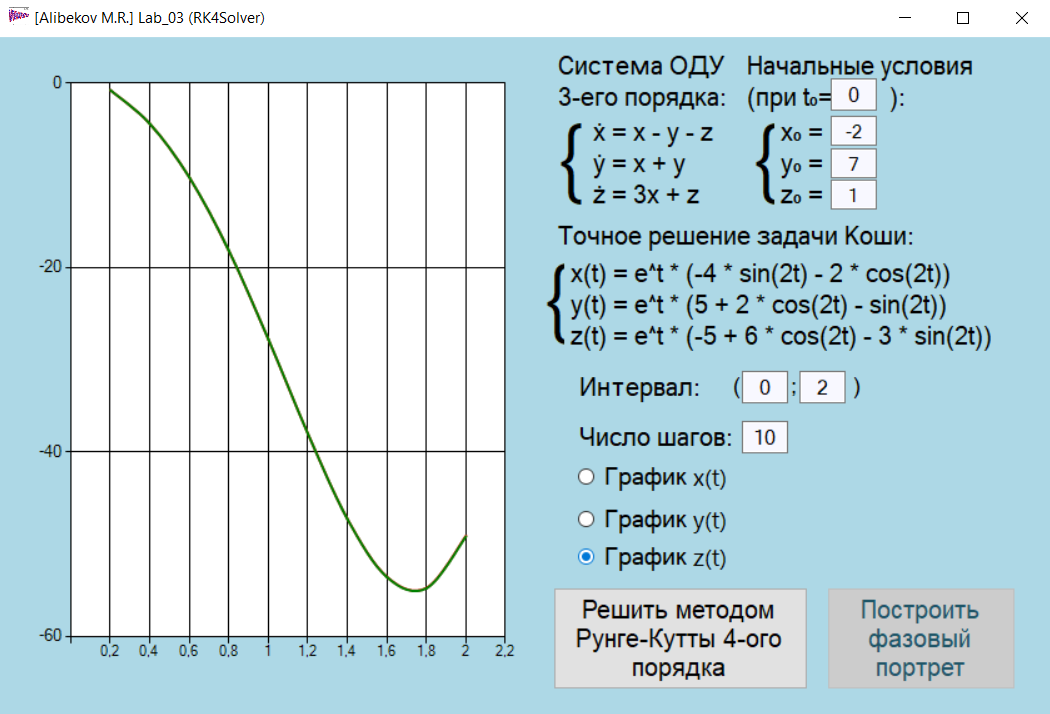


Рисунок 5. Построение графиков функций (график z(t))

1. **Заключение**

В результате лабораторной работы был разработан программный комплекс на языке C#, позволяющий численно решить задачу Коши для системы из трёх обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка методом Рунге-Кутты четвёртого порядка и сравнить полученное приближение с точным решением, полученным аналитическим путём.

В результате работы программы на экране в виде таблицы отображаются приближенные значения решения в соответствующих им узлах. Помимо этого, также можно построить графики , как для приближенного решения (линия красного цвета), так и для точного решения (линия зелёного цвета).

В ходе экспериментов сравнили результирующие решения, полученные численным и аналитическим методами при разных начальных условиях, интервалах и числе шагов. И на основе данной лабораторной работы можно сделать вывод, что численное и точное решения оказываются достаточно близки при приближении малыми шагами, независимо от начальных условий.

В результате, цели, поставленные в данной лабораторной работе, были успешно достигнуты.

1. **Литература**
2. Д.П. Кострамов, А.П. Фаворский Вводные лекции по численным методам: Учеб. пособие. – М.: Логос, 2004. – 184 с.: ил.
3. Герберт Шилдт. C# 4.0: Полное руководство: OOO “И.Д. Вильямс”, 2011 – 1056 с.
4. Курс лекций по Вычислительным Методам 6-ого семестра в 2020-2021 учебных

годах направления ФИИТ в Институте информационных технологий, математики и механики в ННГУ им. Лобачевского.

1. Метод Рунге-Кутты. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_Рунге_—_Кутты>
2. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 1994. — 544 с.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. Учеб. пособие для вузов, — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. — 432 с. — ISBN 5-02-013996-3.